O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI QOSHIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

2. 2017

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ - 2017

Адрес редколлегии: 100125. Ташкент, Дурмон йули, 29,
Институт математики при Национальном Университете
Узбекистана им. М.Улугбека,
телефон: (+99871) 262-75-44

ТАШКЕНТ - 2017

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№2, pp.23-31

УДК 519.652

Оптимальные интерполяционные формулы в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$

Бабаев С.С., Маматова Н.Х., Хаётов А.Р.

Ushbu maqolada $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosizda optimal interpolyatsion formulalar qurishning d^{2m}/dx^{2m} differensial operatorning diskret analogiga asoslangan metodi berilgan.

In the present paper we give the method of construction of optimal interpolation formulas in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ which based on the discrete analogue of the differential operator d^{2m}/dx^{2m}.

1. Введение и постановка задачи

В настоящей работе с использованием вариационного метода исследуется задача построения оптимальных интерполированых формул в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ непериодических функций, у которых обобщенные производные m-го порядка интегрируемы с квадратом.

Рассмотрим интерполяционную формулу

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} C_k(x)\varphi(x).$$

Значение

$$\varphi(x) - P_\varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{N} C_k(x)\varphi(x_k)$$

ошибки интерполяционной формулы в некоторой точке z есть функционал над классом функций φ:

$$(\ell,\varphi) = \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{k=0}^{N} C_k(z)\varphi(x_k), \tag{1}$$

где

$$\ell(x,z) = \delta(x-z) - \sum_{k=0}^{N} C_k(z)\delta(x-x_k) \tag{2}$$

функционал погрешности интерполяционной формулы $P_\varphi(x)$, $C_k(x)$ - коэффициенты, а x_k - узлы интерполяционной формулы (1), $0 \le x_0 < x_1 < ... < x_N \le 1$, δ – дельта-функция Дирака, $\varphi \in L_2^{(m)}(0,1)$.

Так как функционал ℓ определен на $L_2^{(m)}(0,1)$, тогда налагаются следующие условия (см. [2])

$$(\ell, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = \overline{0, m-1}. \tag{3}$$

Функционал ℓ - ограниченный и линейный в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, а его норма определяется равенством

$$\|\ell|L_2^{(m)*}(0,1)\| = \sup_{\|\varphi|L_2^{(m)}(0,1)\|=1} |(\ell,\varphi)|.$$

Согласно неравенству Коши-Шварца

$$|(\ell,\varphi)| \le \|\ell|L_2^{(m)*}(0,1)\| \; \|\varphi|L_2^{(m)}(0,1)\|.$$

Следовательно, оценка погрешности интерполяционной формулы $P_\varphi(x)$ на функциях пространства $L_2^{(m)}(0,1)$ сводится к нахождению нормы функционала (2) в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$.

Итак, для оценки погрешности интерполяционной формулы (1) достаточно решить следующую задачу.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности ℓ рассматриваемой интерполяционной формулы $P_\varphi(x)$.

Очевидно, что норма функционала погрешности ℓ зависит от коэффициентов $C_k(x)$ и узлов x_k.

Если

$$\|\overset{\circ}{\ell}|L_2^{(m*)}(0,1)\| = \inf_{C_k(x),x_k} \|\ell|L_2^{(m)*}(0,1)\|, \tag{4}$$

тогда функционал $\overset{\circ}{\ell}$ называется *оптимальным функционалом погрешности*, а соответствующая интерполяционная формула - *оптимальной интерполяционной формулой.*

Таким образом, для того чтобы построить оптимальную интерполяционную формулу надо решить следующую задачу

Задача 2. Найти такие $\overset{\circ}{C}_k(x)$ и $\overset{\circ}{x}_k$, чтобы выполнялось равенство (4).

$\overset{\circ}{C}_k(z)$ и $\overset{\circ}{x}_k$ соответсвенно называются *оптимальными коэффициентами* и *оптимальными узлами* интерполяционной формулы (1).

Далее, занимаемся решениями задач 1 и 2.

2. Система для коэффициентов оптимальных интерполяционных формул

Задача 1 решается с помощью так называемой экстремальной функцией интерполяционной формулы. Функция ψ_ℓ, для которой выполняется следующее равенство называется *экстремальной функцией*

$$(\ell, \psi_\ell) = \| \ell | L_2^{(m)*}(0,1) \| \cdot \| \psi_\ell | L_2^{(m)}(0,1) \| .$$

Следует отметить, что экстремальная функция $\psi_\ell(x)$ функционала погрешности (2), определенная равенством (9), в n-переменном случае в пространстве $L_2^{(m)}$ найдена в [1].

Из результата работы [1] мы получим следующее явное выражение экстремальной функции ψ_ℓ функционала погрешности (2)

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \left[G(x-z) - \sum_{k=0}^{N} C_k(z) G(x-x_k) \right] + P_{m-1}(x), \qquad (5)$$

где

$$G(x) = \frac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!}, \qquad (6)$$

$P_{m-1}(x)$ - некоторый полином степени $m-1$.

Теперь переходим к нахождению представления нормы функционала погрешности ℓ.

Норма функционала погрешности интерполяционной формулы выражается через билинейную форму от коэффициентов и значений экстремальной функции ψ_ℓ.

Поскольку пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ гильбертово, то

$$\|\ell\|^2 = (\ell, \psi_\ell).$$

Отсюда, учитывая (5) и четность функции $G(x)$, определенной равенством (10), и используя определение дельта-функции имеем

$$\|\ell\|^2 = (-1)^m \left(\sum_{k=0}^{N} \sum_{k'=0}^{N} C_k(z) C_{k'}(z) G(x_k - x_{k'}) - 2 \sum_{k=0}^{N} C_k(z) G(z - x_k) \right). \tag{7}$$

Таким образом, задача 1 решена.

Далее занимаемся решением задачи 2, когда узлы x_k фиксированы. Тогда задача 2 упрощается и требуется найти минимум значения $\|\ell\|$ только по коэффициентам $C_k(z)$. Из (2) видно, что квадрат нормы функцонала погрешности ℓ является многомерной квадратной функцией относительно коэффициентов $C_k(z)$ и, кроме того, удовалетворяет условию (3).

Для нахождения точки локального минимума квадрата нормы (7) при условиях (3) применяем метод неопределенных множителей Лагранжа.

Поэтому рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Psi = \|\ell\|^2 + 2(-1)^m \sum_{\alpha=0}^{m-1} \lambda_\alpha (\ell, x^\alpha),$$

где λ_α- неизвестные множители Лагранжа.

Приравнивая к нулю частные производные от Ψ по $C_k(z)$ и λ_α, получаем

$$\sum_{k'=0}^{N} \overset{\circ}{C}_{k'}(z) G(x_{k'} - x_k) + P_{m-1}(x_k) = G(z - x_k), \ k = \overline{0, N}, \tag{8}$$

$$\sum_{k'=0}^{N} \overset{\circ}{C}_{k'}(z) x_{k'}^\alpha = z^\alpha, \ \alpha = \overline{0, m-1}, \tag{9}$$

где $G(x)$ определяется формулой (6). В этой системе неизвестными являются коэффициенты $\overset{\circ}{C}_k(z)$ и полином $P_{m-1}(x)$ степени $m-1$.

Система (8), (9) имеет единственное решение. Здесь мы не приводим доказательство этого результата.

3. Метод построения оптимальных интерполяционных формул

В настоящем параграфе занимаемся решением системы (8), (9), когда узлы интерполяционной формулы равноотстоящие. Пусть $x_k = kh$, $h = \frac{1}{N}$, $N \geq m$. Тогда система (8), (9) принимает вид

$$\sum_{k'=0}^{N} \overset{\circ}{C}_{k'}(z)G(kh - k'h) + P_{m-1}(kh) = G(z - kh), \ kh \in [0,1], \tag{10}$$

$$\sum_{k'=0}^{N} \overset{\circ}{C}_{k'}(z) \cdot (k'h)^{\alpha} = z^{\alpha}, \qquad \alpha = \overline{0, m-1}. \tag{11}$$

Считая, что $\overset{\circ}{C}_{k}(z) = 0$ при $hk < 0$ и $hk > 1$ и пользуясь определением свертки двух функций дискретного аргумента [2], систему (10), (11) перепишем в виде

$$\overset{\circ}{C}_{k}(z) * G(hk) + P_{m-1}(hk) = G(z - hk), \quad hk \in [0,1], \tag{12}$$

$$\sum_{k=0}^{N} \overset{\circ}{C}_{k}(z) \cdot (kh)^{\alpha} = z^{\alpha}, \qquad \alpha = \overline{0, m-1}. \tag{13}$$

Чтобы решить систему (12), (13) нам требуется дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$. В работе [5] построен дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ и доказана следующая

Теорема 1. *Дискретный аналог дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} удовлетворяющее равенство*

$$hD_h^{(m)}(hk) * G(hk) = \delta(hk), \tag{14}$$

имеет вид

$$D_h^{(m)}(h\beta) = p \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m-1} A_k q_k^{|\beta|-1} & |\beta| \geq 2, \\ 1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} A_k & |\beta| = 1, \\ C + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{q_k} & \beta = 0, \end{cases} \tag{14*}$$

где $p = \frac{(2m-1)!}{h^{2m}}$, $A_k = \frac{(1-q_k)^{2m+1}}{E_{2m-1}(q_k)}$, $C = -2^{2m-1}$, $E_{2m-1}(x)$ *– полином Эйлера-Фробениуса степени* $2m-1$, q_k *- корни полинома* $E_{2m-2}(x)$,

$|q_k| < 1$, h - *малый положительный параметр*, $\delta(hk) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases}$ $G(hk)$ *определяется равенством (10) при* $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим функции

$$v(hk) = \overset{\circ}{C}_k(z) * G(hk), \tag{15}$$

$$u(hk) = v(hk) + P_{m-1}(hk). \tag{16}$$

В силу (14) оператор $D_h^{(m)}(hk)$, определенный равенством (14*), позволяеть выразить, в свою очередь, $\overset{\circ}{C}_k(z)$ в виде

$$\overset{\circ}{C}_k(z) = hD_h^{(m)}(hk) * u(hk) \tag{17}$$

и преобразовать задачу отыскания оптимальной интерполяционной формулы в задачу отыскания неизвестной функции $u(hk)$. Для того чтобы вычислить свертку (17), надо определить функцию $u(hk)$ при всех целых значениях k. Из (12) и (16) видно, что $u(hk) = G(z - hk)$ при $k = 0, 1, ..., N$. Поэтому нам остается только определить функцию $u(hk)$ при $k < 0$ и $k > N$. Сперва рассмотрим функцию $v(hk)$ при $k < 0$ и $k > N$.

Непосредственым вычислением из (15), пользуясь (3), получим следующее

$$v(hk) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{(hk)^{2m-1-j}(-1)^j}{j!\cdot(2m-1-j)!} z^j - \sum\limits_{j=0}^{m-1} d_j(z)\cdot(kh)^j, & kh < 0, \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{(hk)^{2m-1-j}(-1)^j}{j!\cdot(2m-1-j)!} z^j + \sum\limits_{j=0}^{m-1} d_j(z)\cdot(kh)^j, & kh > 1, \end{cases} \tag{18}$$

где

$$d_j(z) = \frac{1}{2}\frac{(-1)^{2m-1-j}}{j!\cdot(2m-1-j)!}\sum_{k'=0}^{N} \overset{\circ}{C}_{k'}(z)\cdot(hk')^{2m-1-j}. \tag{19}$$

Учитывая (12), (15), (18), из (16) для $u(hk)$ имеем

$$u(hk) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\frac{(hk)^{2m-1-j}(-1)^j}{j!\cdot(2m-1-j)!}z^j - \sum\limits_{j=0}^{m-1}d_j(z)(kh)^j + P_{m-1}(hk), & kh<0, \\ G(z-kh), & 0\le hk\le 1, \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\frac{(hk)^{2m-1-j}(-1)^j}{j!\cdot(2m-1-j)!}z^j + \sum\limits_{j=0}^{m-1}d_j(z)(kh)^j + P_{m-1}(kh), & kh>1. \end{cases}$$

Отсюда, введя обозначения

$$Q^-_{m-1}(hk) = P_{m-1}(hk) - \sum_{j=0}^{m-1} d_j(z)\cdot(hk)^j, \tag{20}$$

$$Q^+_{m-1}(hk) = P_{m-1}(hk) + \sum_{j=0}^{m-1} d_j(z)\cdot(hk)^j, \tag{21}$$

получим

$$u(hk) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\frac{(hk)^{2m-1-j}(-1)^j}{j!\cdot(2m-1-j)!}\cdot z^j + Q^-_{m-1}(kh), & kh<0, \\ G(z-kh), & 0\le hk\le 1, \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\frac{(hk)^{2m-1-j}(-1)^j}{j!\cdot(2m-1-j)!}\cdot z^j + Q^+_{m-1}(kh), & kh>1. \end{cases} \tag{22}$$

Здесь неизвестными являются $Q^-_{m-1}(hk)$ и $Q^+_{m-1}(hk)$ - многочленамы степени $m-1$. Если они найдены, то из равенств (20), (21) получаем

$$P_{m-1}(hk) = \frac{1}{2}\left(Q^+_{m-1}(hk) + Q^-_{m-1}(hk)\right),$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} d_j(z)\cdot(hk)^j = \frac{1}{2}\left(Q^+_{m-1}(hk) - Q^-_{m-1}(hk)\right).$$

Неизвестные $Q^-_{m-1}(hk)$ и $Q^+_{m-1}(hk)$ будут решением следующей задачи.

Задача 3. Найти решение уравнения

$$hD_h^{(m)}(hk) * u(hk) = 0, \qquad hk[0,1], \tag{23}$$

имеющего вид (22).

Если задача 3 решена, т.е. найдены неизвестные полиномы $Q^-_{m-1}(hk)$ и $Q^+_{m-1}(hk)$, то оптимальные коэффициенты интерполяционной формулы (1), определяются формулой

$$\overset{\circ}{C}_k(z) = hD_h^{(m)}(hk) * u(hk), \quad k = 0, 1, ..., N.$$

Тогда оптимальная интерполяционная формула принимает вид

$$P_\varphi(z) = \sum_{k=0}^{N} \overset{\circ}{C}_k(z)\varphi(hk).$$

Как сказано выше, в задаче 3 неизвестными являются $Q^-_{m-1}(hk)$ и $Q^+_{m-1}(hk)$, т.е. имеются $2m$ неизвестных коэффициентов полиномов $Q^-_{m-1}(hk)$ и $Q^+_{m-1}(hk)$. Для нахождения этих неизвестных из (23) получается следующая система линейных уравнений

$$\begin{array}{ll} D_h^{(m)}(hk) * u(hk) = 0, & k = -1, -2, ..., -m, \\ D_h^{(m)}(hk) * u(hk) = 0, & k = N+1, N+2, ..., N+m. \end{array} \tag{24}$$

Система (24) имеет единственное решение.

Таким образом, если задача 3 решена, то задача 2 также будет решена.

Реализовав выше сказанные при $m = 1$ получим следующий результать.

Теорема 2. *Коэффициенты оптимальной интерполяционной формулы вида* $P_\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{N} \overset{\circ}{C}_k(z) \cdot \varphi(kh)$ *в пространстве* $L_2^{(1)}(0,1)$ *определяются следующим образом*

$$\overset{\circ}{C}_k(z) = \frac{1}{2h}\left(|z - h(k-1)| + |z - h(k+1)| - 2|z - hk|\right), \quad k = 0, 1, ..., N.$$

Литература

1. Sobolev S.L. On Interpolation of Functions of n Variables, in: Selected Works of S.L.Sobolev, Springer, 2006, pp. 451-456.

2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. Москва, Наука, 1974, 808 с.

Содержание

Адашев Ж.К., Мамадалиев У.Х. *Разрешимые алгебры Лейбница с абелевым нильрадикалом* 3

Аманов Д. *О теореме единственности для эллиптико-гиперболического уравнения* 13

Артыкбаев А., Хасанов Г.А. *Условные кривизны, порождаемые цилиндрическим отображением поверхностей* 16

Бабаев С.С., Маматова Н.Х., Хаётов А.Р. *Оптимальные интерполяционные формулы в пространстве* $L_2^{(m)}(0,1)$ 23

Botirov G.I. *The uniqueness condition for Gibbs measure of the XY model on Cayley trees* 32

Ганиходжаев Р.Н., Бахрамов Ж.А. *Связные и вполне несвязные фракталы на плоскости Лобачевского* 40

Дурдиев Д.К., Бозоров З.Р. *Задача определения двумерного ядра специального вида в интегро–дифференциальном уравнении гиперболического типа* 52

Джамалов С.З. *Об одной линейной обратной задаче для уравнения смешанного типа первого рода второго порядка в трехмерном пространстве* 65

Jamilov U.U. *Dynamics of a strictly non-Volterra quadratic stochastic operator on* S^4 72

Нарманов А.Я., Турсунов Б.А. *О геометрии субмерсий над орбитой векторных полей Киллинга* 80

Нуралиев Ф.А. *Кубатурные формулы по квадрату* 87

Мамадалиев Н.К. *О некоторых кардинальных и топологических свойствах пространства полуаддитивных функционалов с конечными носителями* 90

Москальков М.Н., Утебаев Д., Утебаев Б.Д. *Разностные схемы повышенной точности для решения уравнений с сильной дисперсией* 98

Отемуратов Б.П. *О некоторых кардинальных и топологических свойствах пространства полуаддитивных функционалов с конечными носителями* 108

Раимова Г.М. *Вероятностные модели для решения задачи Дирихле для системы эллиптических уравнений* 118

Расулов М.С. *Задача со свободной границей в экологии* 125
Рузиев М.Х. *Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области* 134
Сафаров У.А. *Нежесткость критических гомеоморфизмов окружности* 138
Усманов С.Э. *Ограниченность максимальных операторов, связанных с сингулярными поверхностями* 157
Фаязов К.С., Хажиев И.О. *Условная устойчивость краевой задачи для системы абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами* 147
Атамурат Шамуратович Кучкаров 165

Mundarija

Adashev J.K., Mamadaliyev U.X. *Nilradikali Abel algebrasi bo‘lgan to‘ldiruvchi fazoning o’lchami* 3
Amanov D. *Elliptik-giperbolik tenglama uchun yagonalik teoremasi haqida* 13
Artiqbayev A. Xasanov G.A. *Условные кривизны, порождаемые цилиндрическим отображением поверхностей* 16
Babayev S.S., Mamatova N.X., Xayotov A.R. *Оптимальные интерполяционные формулы в пространстве* $L_2^{(m)}(0,1)$ 23
Botirov G.I. *Keli daraxtida aniqlangan XY model uchun Gibbs o‘lchovining yagonalik sharti* 32
Ganixodjayev R.N., Baxramov J.A. *Lobachevskiy tekisligida bog’liq va deyarli bog’liq bo’lmagan fraktallar* 40
Durdiyev D.K., Bozorov Z.R. *Integro – differentsial to‘lqin tenglamasidan integral hadning yadrosini aniqlash bo‘yicha teskari masala* 52
Djamalov S.Z. *Aralash tiptagi ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun ba’zi bir chiziqli teskari masala* 65
Jamilov U.U. S^4 *dagi bir qat’iy novolterra kvadratik stoxastik operatorning dinamikasi* 72
Narmanov A.Ya., Tursunov B.A. *Killing vector maydonlar orbitasi* 80 *ustida submersiyalar geometriyasi haqida* . . . . .
Nuraliyev F.A. *Kvadrat boyicha kubatur formula* 87
Mamadaliyev N.K. *Chekli tashuvchili yarimadditiv funksionallar fazosining ba’zi kardinal va topologik xossalari haqida* 90
Moskalkov M.N., Utebayev D., Utebayev B.D. *Разностные схемы повышенной точности для решения уравнений с сильной дисперсией* 98
Otemuratov B.P. *Sharning shegarasida berilgan va bir ulchamli golomorf davom ettirish hossasiga ega integrallanuvshi funksiyalar* 108
Raimova G.M. *Elliptic tenglamalar sistemasiga qo’yilgan Dirixle masalasini echish uchun ehtimoliy modellar* 118

Rasulov M.S. *Tabiatda noma'lum chegarali masala* 125
Ro'ziyev M.X. *Singulyar koeffisientli aralash tirdagi tenglama uchun chegaralanmagan cohada nolokal masala* 134
Safarov U.A. *Kritikli aylana gomeomorfizmlarining noqattiqligi* 138
Usmanov S.E. *Singuluar sirtlar bilan bog'langan maksimal operatorlarning chegaralanganligi* 157
Fayazov K.S., Xajiyev I.O. *Operator koeffitsientli ikkinchi tartibli abstrakt differensial tenglamalar sistemasi uchun chegaraviy masalaning shartli turg'unligi* 147
Atamurat Shamuratovich Kuchkarov 165

Компьютерная верстка: к.ф.-м.н. *Ф.А.Нуралиев*

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации
Республики Узбекистан 22 декабря 2006 г. Регистр. №0044.

Сдано в набор 30.01.2017 г. Подписано к печати 08.02.2017 г.
Формат 60×84 1/16. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл.-печ.л. 11,0. Тираж 120 Заказ №

Институт математики при Национальном Университете
Узбекистана им. М.Улугбека: 100125,
Ташкент, Академгородок, ул. Дурмон йули, 29.

Отпечатано в ООО "NISO POLIGRAF".
Ташкентский вилоят, Урта Чирчикский туман,
ССГ "Ок-Ота" улица Марказ-1